Über die Rückführung von Integralformeln auf die Rektifikation der Ellipse und der Hyperbel *

Leonhard Euler

Es sind vor allem die Dinge herausragend, welche die im höchsten Maße scharfsinnigen Geometer MacLaurin und D'Alembert über die Reduktion von Integralformeln auf die Rektifikation der Ellipse und der Hyperbel mitgeteilt haben, weil in diesen nicht nur das überragende Vermögen ihres Geistes erkannt wird, sondern auch die nicht geringe Hoffnung erstrahlt, diese Rektifikation in der Analysis gleichermaßen gefällig zu gebrauchen wie wir es bis jetzt nur bei den Kreisbögen und Logarithmen zu tun pflegen. Es besteht freilich kein Zweifel, dass diese von den größten Geometern mit so glücklichem Ausgang unternommene Untersuchung sich sehr weit erstreckt und irgendwann noch überaus reife Früchte tragen wird; denn obgleich bei dieser Aufgabe schon sehr viel vollbracht worden ist, ist dennoch der ganze Gestand noch nicht als erschöpft anzusehen. Denn nachdem ich auf ganz anderem Wege dorthin gelangt war, dass ich so bei der Ellipse wie bei der Hyperbel verschiedene Bogen, deren Differenz sich geometrisch angeben lassen soll, bestimmen konnte, scheinen die oben gelobten Männer freilich noch daran zu zweifeln, ob sich daraus ein leichter Zugang zur Behandlung dieses Gegenstandes ergeben kann. Besonders scheint hier aber eine geeignete

*Original Titel: "De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis ac hyperbolae ", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 10* (1766, verfasst 1759): pp. 3–50, Nachdruck in: Opera Omnia: Series 1, Volume 20, pp. 256 – 301, Eneström-Nummer E295, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

Bezeichnungsweise vermisst zu werden, mit deren Hilfe die Ellipsenbögen genauso bequem in der Rechnung ausgedrückt werden können wie schon die Logarithmen und die Kreisbogen mit großen Nutzen für die Analysis durch geeignete Bezeichnungen in das Kalkül eingeführt worden sind. Solche neuen Bezeichnungen werden eine neue Gattung des Kalküls an die Hand geben, dessen gleichsam erste Elemente ich hier darzulegen beschlossen habe.
Wie aber alle Kreisbögen auf den Kreis, dessen Radius der Einheit gleich festgesetzt wird, bezogen zu werden pflegen, so wird es auch für alle Kegelschnitte, welche wir in das Kalkül einbeziehen wollen, gefällig sein, ein gewisses festes durch die Einheit auszudrückendes Maß anzunehmen, welches sich gleichermaßen auf alle Gattungen bezieht. Es ist aber ersichtlich, dass dieses Maß nicht der transversalen Achse zukommen kann, weil diese bei der Parabel notwendigerweise unendlich groß wird, bei der Hyperbel aber einen negativen Wert annimmt; genauso wenig ist die konjugierte Achse für diesen Zweck geeignet, welche ja bei der Parabel auch unendlich wird und bei der Hyperbel sogar einen imaginären Wert erhält. Daher verbleibt der Parameter, welchem nichtdestoweniger immer ein fester Wert zugeteilt werden kann, bei welchem nichts entgegen steht, dass selbigem dauerhaft ein fester Wert zugeteilt wird; und weil ja für den Kreis der Parameter in den Durchmesser übergeht und dessen Hälfte mit der Einheit ausgedrückt zu werden pflegt, werde ich im Folgenden durchgehend den Parameter mit zwei anzeigen, sodass seine Hälfte mit der Einheit ausgedrückt wird.

HYPOTHESE 1

§1 *Für mich soll also durchgehend die Einheit den Halbparameter oder die rechte Halbseite eines Kegelschnittes ausdrücken.*

KOROLLAR 1

§2 Wenn also a die transversale Halbachse bezeichnet, auf welcher man die Abszissen x vom Scheitel aus nehme und zu welchen man die Ordinaten y orthogonal festlege, wird man diese Gleichung haben:

$$yy = 2x - \frac{xx}{a}.$$

Korollar 2

§3 Solange a eine positive Größe bezeichnet, wird die Gleichung eine für eine Ellipse sein, welche freilich, sofern $a = 1$ ist, in den Kreis übergeht; aber für $a = \infty$ wird man eine Parabel haben. Negative Werte von a hingegen erstrecken sich zur Hyperbel.

Korollar 3

Aus dieser Gleichung wird

$$dy = \frac{dx(a-x)}{\sqrt{a(2ax-xx)}}$$

und daher der der Abszisse x entsprechende Bogen

$$= \int \frac{dx\sqrt{aa-2a(1-a)x+(1-a)xx}}{\sqrt{a(2ax-xx)}} \quad \text{oder} \quad = \int dx\sqrt{\frac{a}{2ax-xx}+\frac{a-1}{a}}$$

für die Ellipse, wenn a eine positive Zahl war.

Korollar 4

§5 Für $a = 1$ wird für den Kreis der der Abszisse x, welche die des Sinus versus ist, entsprechende Bogen $= \int dx\sqrt{\frac{1}{2x-xx}}$, wie bekannt ist, und für $\alpha = \infty$ geht der der Abszisse x entsprechende Bogen der Parabel als $= \int dx\sqrt{\frac{1}{2x}+1}$ hervor.

Korollar 5

§6 Wenn schließlich a einen negativen Wert hat, sprich $a = -c$, wird der der Abszisse x entsprechende Hyperbelbogen $= \int dx\sqrt{\frac{c}{2cx+xx}+\frac{c+1}{c}}$ sein.

Hypothese 2

§7 *Bei einem Kegelschnitt, dessen Halbparameter* $= 1$ *und die transversale Halbachse* $= a$ *ist und die Abszissen auf der transversalen Achse vom transversale aus genommen werden, werde ich den der Abszisse* x *entsprechenden Bogen mit dem Schriftzeichen* $\Pi x[a]$ *anzeigen.*

Korollar 1

§8 Hinter dem Zeichen Π schreibe man also die auf der transversalen Achse vom Scheitel aus berechnete Abszisse, welchem man die transversale Halbachse innerhalb der Klammern [] ausgedrückt nachstelle.

Korollar 2

§9 Daher bezeichnet dieser Ausdruck $\Pi x[a]$ einen Ellipsenbogen, wenn a eine positive Größe ist, und einen Kreisbogen, wenn $a = 1$ ist, der Sinus versus welches Bogens $= x$ ist. Aber wenn $a = \infty$ ist, drückt er den Parabelbogen aus, und schließlich, wenn a eine negative Größe ist, einen Hyperbelbogen.

Korollar 3

§10 Ein Ausdruck $\Pi x[a]$ dieser Art hat also einen bestimmten Wert und durch ihn wird nicht nur ein Kegelschnitt definiert, sondern auch sein Bogen wird durch jenen Ausdruck angezeigt.

Korollar 4

§11 Es ist aber offenkundig, damit der Wert dieses Ausdrucks reell wird, dass die Abszisse x nicht nur reell, sondern sogar positiv sein muss. Aber zusätzlich, wenn a eine positive Größe ist, ist es notwendig, dass die Abszisse x den Grenzwert $2a$ nicht überschreitet. Die Größe a muss aber notwendigerweise reell sein.

Korollar 5

§12 Also wird dieser Ausdruck $\Pi x[a]$ imaginär sein, wenn entweder 1) die Zahl a imaginär war oder 2) x eine imaginäre Größe war oder 3) eine negative Größe war oder 4) zwar eine positive Größe war, aber dennoch größer als $2a$, wenn freilich a eine positive Größe ist.

Korollar 6

§13 Man bemerke auch, dass diese Formel $\Pi x[a]$ eine Funktion von x solcher Art darbietet, welche mit verschiedenem x auch verschwindet, sodass $\Pi 0[a] = 0$- Wenn aber x eine unendlich kleine Größe $= \omega$ war, wird $\Pi\omega[a] = \sqrt{2\omega}$ sein und wird daher nicht von a abhängen.

THEOREM 1

§14 *Wenn diese Differentialform* $dx\sqrt{\frac{a}{2ax-xx}+\frac{a-1}{a}}$ *so integriert wird, dass das Integral für* $x=0$ *verschwindet, so wird*

$$\int dx\sqrt{\frac{a}{2ax-xx}+\frac{a-1}{a}}=\Pi x[a]$$

sein.

BEWEIS

Jeder der beiden Ausdrücke bezieht sich auf den Kegelschnitt, dessen Halbparameter $=1$ und des transversale Achse $=a$ ist, und bezeichnet seinen vom Scheitel aus genommenen Bogen, welcher der Abszisse x entspricht, wobei die Abszisse auf der transversalen Achse genommen wurde und gleichermaßen vom Scheitel aus genommen worden ist.

KOROLLAR 1

§15 Wenn wir für a $-a$ schreiben, wird man haben

$$\int dx\sqrt{\frac{a}{2ax+xx}+\frac{a+1}{a}}=\Pi x[-a],$$

in welchem Fall, wenn die Größe in Klammern negativ ist, ein Hyperbelbogen angezeigt wird.

KOROLLAR 2

§16 Wenn $a=\infty$ ist, in welchem Fall die Rektifikation der Parabel hervorgeht, wird

$$\int dx\sqrt{\frac{1}{2x}+1}=\Pi x[\infty]$$

sein, dessen Wert, wie bekannt ist, mithilfe von Logarithmen dargeboten werden kann.

KOROLLAR 3

§17 Aber wenn $a = 1$ ist, dass man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - xx}} = \Pi x[1]$$

hat, wird mit diesem Ausdruck der Bogen des Kreises, dessen Radius $= 1$ ist, ausgedrückt, der Sinus versus welches Bogens zudem $= x$ ist; sein Kosinus wird also $= 1 - x$ und sein Sinus $= \sqrt{2x - xx}$ sein.

KOROLLAR 4

§18 Weil derselben Abszisse x zwei Bogen entsprechen, der eine positiv, der andere negativ, wird der Ausdruck $\Pi x[a]$ per se zwei Werte darbieten, genauso wie die Quadratwurzel; er wird also eine biforme Funktion sein, so einen negativen wie einen positiven Wert enthaltend.

SCHOLION

§19 Sooft sich aber der Ausdruck $\Pi x[a]$ auf die Ellipse bezieht, umfasst er nicht nur zwei, sondern sogar unendlich viele Werte, genauso wie im Kreis unendlich viele demselben Sinus versus zukommende Bogen gegeben sind. Wir wollen also die Natur einer infinitiformen Funktion dieser Art für die Ellipsen genauer betrachten.

PROBLEM 1

Alle derselben Abszisse x entsprechenden Ellipsenbogen zu finden oder alle der Formel $\Pi x[a]$ zukommenden Werte zu bestimmen.

LÖSUNG

Es sei z der kleinste der Abszisse x entsprechende Bogen in der Ellipse, deren transversale Halbachse $= a$ ist; man setze den Halbumfang der Ellipse $= A$, dass der ganze Umfang $= 2A$ ist, und ist ist offenkundig, dass derselben Abszisse x auch die Bogen $2A - z$, $2A + z$, $4A - z$, $4A + z$, $6A - z$, $6A + z$ etc. entsprechen, welche alle mit ihren Negativen in der Formel $\Pi x[a]$ enthalten sind, sodass ihr Wert im Allgemeinen $\pm 2nA + \pm$ ist, während n irgendeine ganze Zahl bezeichnet.

Korollar 1

§21 Weil $\frac{1}{2}A$ der vierte Teil des Umfangs der Ellipse ist und diesem die Abszisse $x = a$ zukommt, wird $\frac{1}{2}A = \Pi a[a]$ sein, aber dem Halbumfang A kommt die Abszisse $2a$ zu, woher $A = \Pi 2a[a] = 2\Pi a[a]$, also $\Pi 2a[a] = 2\Pi a[a]$ ist.

Korollar 2

§22 Wenn die Abszisse $= 2a - x$ genommen ist, wird der ihr zukommende Bogen $= A - \Pi x[a]$ sein, woher man diese Gleichheit ableitet

$$\Pi x[a] + \Pi(2a - x)[a] = 2\Pi a[a],$$

wo die Klammern $()$, welche die Abszisse einschließen, von den Klammern $[]$, welche die transversale Achse beinhalten, sorgfältig unterschieden werden müssen.

Korollar 3

§23 Dieselbe Gleichheit kann aus dem Integral abgeleitet werden; denn für $2a - x$ anstelle von x gesetzt wird gelten:

$$\Pi(2a - x)[a] = -\int dx \sqrt{\frac{a}{2ax - xx} + \frac{a-1}{a}} = -\Pi x[a] + \text{Konst.}.$$

Die Konstante muss hingegen aus einem bestimmten Fall erschlossen werden. Wenn $x = 0$ gesetzt wird, wird Konst. $= \Pi 2a[a]$; oder wenn $x = a$ gesetzt wird, geht hervor:

$$\text{Konst.} = \Pi a[a] + \Pi[a]a = 2\Pi a[a].$$

Scholion

§24 Ellipsenbogen haben aber außerdem diese Eigenschaft, dass, wenn die transversale Achse $2a$ kleiner war als der Parameter, was natürlich passiert, wenn die kleine Achse als die transversale genommen wird, dieselben Bogen in einer anderen Ellipse genommen werden können, deren Achse größer ist als der Parameter. Diese Reduktion fußt also auf der Ähnlichkeit der Ellipsen, deren Halachsen a und $\frac{1}{a}$ sind, während der Parameter $= 2$ derselbe bleibt.

PROBLEM 2

§25 *Den Ellipsenbogen $\Pi x[a]$, wenn $a < 1$ war, auf eine andere Ellipse zu zurückzuführen, deren Halbachse kleiner als die Einheit ist.*

LÖSUNG

Weil

$$\Pi x[a] = \int dx \sqrt{\frac{a}{2ax - xx} + 1 - \frac{1}{a}}$$

ist, setze man

$$\sqrt{2ax - xx} = a - aay$$

und es wird

$$2ax - xx = aa(1 - 2ay + aayy) \quad \text{und daher} \quad a - x = a\sqrt{2ay - aayy}$$

sein; daher wird

$$dx = \frac{-aady(1 - ay)}{\sqrt{2ay - aayy}}.$$

Nach dieser Substitution werden wir

$$\Pi x[a] = \int \frac{-aady(1 - ay)}{\sqrt{2ay - aayy}} \sqrt{\frac{1}{a(1 - ay)^2} + 1 - \frac{1}{a}}$$

oder

$$\Pi x[a] = -a\sqrt{a} \cdot \int dy \sqrt{\frac{1 + (a - 1)(1 - ay)^2}{2ay - aayy}}$$

erhalten, welcher Ausdruck auf dieser Form reduziert wird

$$\Pi x[a] = -a\sqrt{a} \cdot \int dy \sqrt{\frac{1}{2y - ayy} + 1 - a}.$$

Wir wollen in der Integralformel $a = \frac{1}{b}$ setzen, dass $b = \frac{1}{a}$ ist; und es wird werden

$$\int dy\sqrt{\frac{b}{2by-yy}+1-\frac{1}{b}} = \Pi y[b] + \text{Konst.}$$

Nachdem der Buchstabe a eingesetzt worden ist, wird man wegen $y = \frac{a-\sqrt{2ax-xx}}{aa}$

$$\Pi x[a] = \text{Konst.} - a\sqrt{a}\cdot\Pi\frac{a-\sqrt{2ax-xx}}{aa}\left[\frac{1}{a}\right]$$

erhalten, wo aus dem Fall $x=0$ die Konstante als $= a\sqrt{a}\cdot\Pi\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\right]$ bestimmt wird, so dass

$$\Pi x[a] = a\sqrt{a}\cdot\Pi\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\right] - a\sqrt{a}\cdot\Pi\frac{a-\sqrt{2ax-xx}}{aa}\left[\frac{1}{a}\right],$$

und so ist der Bogen der Ellipse, deren Halbachse a ist, auf den Bogen der Ellipse zurückgeführt worden, deren Halbachse $= \frac{1}{a}$ ist.

KOROLLAR 1

§26 Wenn $x = a$ gesetzt wird, wird

$$\frac{a-\sqrt{2ax-xx}}{aa} = 0 \quad \text{und daher} \quad \Pi a[a] = a\sqrt{a}\cdot\Pi\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\right].$$

Natürlich verhält sich der Umfang der ersten Ellipse, deren Halbachse $= a$ ist, zum Umfang der zweiten, deren Halbachse $= \frac{1}{a}$ ist, wie $a\sqrt{a}$ zu 1 oder $a^{\frac{3}{4}}$ zu $\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}$.

KOROLLAR 2

§27 Weil aber der der Abszisse $\frac{a-\sqrt{2ax-xx}}{aa}$ entsprechende Bogen für $x = 0$ gesetzt $= \Pi\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\right]$ wird, von da aus für wachsendes x schrumpft, bis er schließlich für $x = a$ verschwindet, verlangt das Gesetz der Fortsetzung, dass für $x > a$ dieser Bogen einen negativen Wert annimmt.

KOROLLAR 3

§28 Also wird für $x = 2a$

$$\Pi \frac{a-\sqrt{2ax-xx}}{aa}\left[\frac{1}{a}\right] = -\Pi\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\right]$$

sein, nach Bemerkung wovon in diesem Fall $x = 2a$

$$\Pi 2a[a] = 2\Pi a[a] = 2a\sqrt{a}\Pi\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\right]$$

werden wird, was mit Korollar 1 übereinstimmt.

SCHOLION

§29 Unter Verwendung der Substitution $\sqrt{2ax-xx} = a - aay$ haben wir die Integralformel in eine andere ihr ähnliche umgewandelt, deren Wert vermöge eines Bogens einer anderen Ellipse dargeboten werden konnte. Wenn wir aber andere Substitutionen gebrauchen, erhalten wir Integralformeln, deren Integration vermöge Kegelschnitte erledigt werden kann; weil aber a so einen positiven wie einen negativen Wert erhalten kann, können dieselben Substitutionen so auf die Ellipsen wie auf die Hyperbeln ausgedehnt werden.

PROBLEM 3

§30 *Die Integralformel*

$$\int dx\sqrt{\frac{a}{2ax-xx}+1-\frac{1}{a}}$$

mittels geeigneter Substitutionen in andere gefälligere Formeln zu überführen, deren Wert immer $= \Pi x[a]$ *sein wird.*

LÖSUNG

Die erste Substitution geschieht durch Setzen von $x = a - naz$, wonach die Integralformel diese Form annimmt

$$\int -ndz\sqrt{\frac{aa-nna(a-1)zz}{1-nnzz}} = \Pi a(1-nz)[a];$$

man multipliziere diese mit m, dass

$$\int -dz\sqrt{\frac{m^2n^2aa+m^2n^4a(a-1)zz}{1-nnzz}} = m\Pi a(1-nz)[a]$$

ist, welcher Ausdruck sich nun auf diese gefällige und gleichermaßen allgemeine Form reduzieren lässt

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}};$$

hier muss natürlich gelten

$$m^2n^2a^2h = f, \quad m^2n^4a(1-a)h = g, \quad -nnh = k,$$

woher wegen $nnh = -k$ und $n = \frac{-f}{k}$

$$-mmaak = f, \quad mma(1-a)kk = gh$$

werden wird, und daher

$$\frac{(a-1)k}{a} = \frac{gh}{f} \quad \text{und} \quad a = \frac{fk}{fk-gh}.$$

Weiter ist

$$m = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{-f}{k}} \quad \text{oder} \quad m = \frac{fk-gh}{fk}\sqrt{\frac{-f}{k}},$$

aus welchen Werten erschlossen wird, dass

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C - \frac{fk-gh}{fk}\sqrt{\frac{-f}{k}}\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1-z\sqrt{\frac{-k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right]$$

sein wird. Dieses Integral wird also, wenn es keine imaginäre Form ist, durch die Integration der Ellipse gelöst, sofern $\frac{fk}{fk-gh}$ eine positive Größe ist; wenn sie aber negativ ist, zeigt die Integration einen Hyperbelbogen an.

Korollar 1

§31 Damit diese Form also frei von imaginären Größen ist, ist es notwendig, dass so $\frac{-f}{k}$ wie $\frac{-k}{h}$ eine positive Größe ist. Wenn eine der beiden oder beide negativ waren, wird der Ausdruck von imaginären Größen verwickelt; nichtsdestoweniger wird sein Wert reell sein, wenn nur das Differential selbst reell ist.

KOROLLAR 2

§32 Weil aber die Differentialformel als reell festgelegt wird, lässt sich annehmen, dass so $f+gzz$ wie $h+kzz$ positive Größen sind; wenn nämlich beide negativ wären, könnten sie nach Ändern der Vorzeichen auf positive zurückgeführt werden. So wollen wir festlegen, dass

$$f+gzz>0 \quad \text{und} \quad h+kzz>0.$$

KOROLLAR 3

§33 Damit unsere gefundene Integralformel einen reellen Bogen eines Kegelschnitts ausdrückt, genügt es nicht, dass $\frac{-f}{k}$ und $\frac{-k}{h}$ reelle Größen sind, sondern es wird zusätzlich verlangt, dass die Abszisse positiv ist; dort müssen zwei Fälle betrachtet werden, je nachdem, ob der Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel war.

KOROLLAR 4

§34 Zuerst sei also der Kegelschnitt eine Ellipse oder $\frac{fk}{fk-gh}$ eine positive Größe und es ist notwendig, dass $1-z\sqrt{\frac{-k}{h}}>0$ oder $1>\frac{-kzz}{h}$ ist, woher $\frac{h+kzz}{h}>0$ wird. Aber per Annahme ist $h+kzz>0$. Daher wird in dem Fall, in dem $\frac{fk}{fk-gh}>0$ ist, für die Realität darüber hinaus verlangt, dass h eine positive Größe ist.

KOROLLAR 5

§35 Für die Hyperbel, oder wenn $\frac{fk}{fk-gh}$ eine negative Größe war, muss unsere Integration so dargesetellt werden

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=C+\frac{gh-fk}{fk}\sqrt{\frac{-f}{k}}\Pi\frac{fk}{gh-fk}\left(z\sqrt{\frac{-k}{h}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh-fk}\right],$$

sodass $\frac{fk}{gh-fk}$ schon eine positive Größe ist. Aber es ist notwendig, dass

$$z\sqrt{\frac{-k}{h}} > 1 \quad \text{oder} \quad \frac{h+kzz}{h} < 0,$$

woher wegen $h + kzz > 0$ der Hyperbelbogen nur reell sein wird, wenn h eine negative Größe ist.

KOROLLAR 6

§36 Also für die Ellipse, oder wenn $\frac{fk}{fk-gh} > 0$ ist, wird unser Ausdruck einen reellen Ausdruck enthalten, sofern

$$1.\ h > 0, \quad 2.\ k < 0 \quad \text{und} \quad 3.\ f > 0.$$

Aber für die Hyperbel, oder wenn $\frac{fk}{gh-fk} > 0$ ist, wird der Bogen reell sein, sofern

$$1.\ h > 0, \quad 2.\ k > 0 \quad \text{und} \quad 3.\ f < 0.$$

SCHOLION 1

§37 Daher können wir mithilfe der gefundenen Formel nur einige Fälle des vorlegten Integrals

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$$

erledigen. Denn weil im Allgemeinen die Buchstaben f, g, h und k entweder positive oder negative Größen bedeuten, werden wir, wenn wir bei der Betrachtung der Fälle sie nur als positiv annehmen, die folgenden reellen Integrationen erlangen:

$$\text{I.}\qquad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h-kzz}} = C - \frac{fk+gh}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}}\Pi\frac{fk}{fk+gh}\left(1-z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk+gh}\right].$$

$$\text{II.}\qquad \int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}} = C - \frac{fk-gh}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}}\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1-z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right];$$

aber in diesem Fall wird verlangt, dass $fk > gh$.

$$\text{III.}\qquad \int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}} = C + \frac{gh-fk}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}}\Pi\frac{fk}{gh-fk}\left(z\sqrt{\frac{k}{h}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh-fk}\right];$$

in diesem Fall wird aber verlangt, dass $gh > fk$.

Weil also in diesem dritten Fall die Beschaffenheit der Buchstaben f, h, k schon bestimmt ist, sich für g aber keine negative Größe annehmen lässt, ist es nur möglich, diese drei vermöge unseres Problems zu erledigen. Die übrigen Fälle sind hingegen alle ausgeschlossen, weil sie zu imaginären Bogen führen. Weil sie dennoch manchmal gewiss reelle Werte haben, werden wir im Folgenden untersuchen, wie diese Fälle durch anderen reelle Bogen ausgedrückt werden können.

Scholion 2

§38 Bevor wir aber diese Aufgabe in Angriff nehmen, wird es helfen, alle Fälle für die Variabilität der Vorzeichen, mit welchen die Buchstaben f, g, h, k behaftet sein können, aufzuzählen, wo es auch passieren kann, dass bestimmte wegen einer anderen Bedingung in zwei unterteilt werden müssen, wie es sich oben im zweiten und dritten Fall zugetragen hat. Nach Hinzufügung dieser Bedingung werden wir die folgenden 12 haben, wo freilich die Buchstaben f, g, h, k angenommen werden nur positive Werte zu haben.

$$\text{I.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}},\qquad \text{wenn } fk > gh \text{ war.}$$

$$\text{II.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}},\qquad \text{wenn } gh > fk \text{ war.}$$

$$\text{III.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h-kzz}}\qquad \text{ohne Einschränkung.}$$

$$\text{IV.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{kzz-h}}\qquad \text{ohne Einschränkung.}$$

$$\text{V.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h+kzz}}\qquad \text{ohne Einschränkung.}$$

$$\text{VI.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}},\qquad \text{wenn } fk > gh \text{ war.}$$

$$\text{VII.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}},\qquad \text{wenn } fk < gh \text{ war.}$$

$$\text{VIII.}\quad \int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}};\qquad \text{hier ist notwendigerweise } fk > gh.$$

$$\text{IX.}\quad \int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{h+kzz}}\qquad \text{ohne Einschränkung.}$$

$$\text{X.}\quad \int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}};\qquad \text{hier ist notwendigerweise } fk < gh.$$

$$\text{XI.}\quad \int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}},\qquad \text{wenn } fk > gh \text{ war.}$$

$$\text{XII.}\quad \int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}},\qquad \text{wenn } fk < gh \text{ war.}$$

Und von diesen zwölf Fällen lassen sich bis jetzt nur drei behandeln, nämlich III, VI und XII, deren Integrale durch einfache Bogen von Kegelschnitten ausgedrückt werden.

SCHOLION 3

§39 Obwohl wir aber in diesen drei Fällen die Integrale entweder durch Ellipsen- oder Hyperbelbogen ausgedrückt haben, sind dennoch bestimmte Beziehungen zwischen den Buchstaben f, g, h und k gegeben, durch welche unser Ausdruck mit so großen Unannehmlichkeiten einhergeht, dass der wahre Wert daher nicht gefunden werden kann, auch wenn er per se mehr als leicht zu ermitteln ist. Und zuerst wird freilich im Allgemeinen, wenn in der Formel

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$$

$fk = gh$ war, der Wert des Integrals so von verschwindenden und unendlichen Größen verwickelt, dass seine wahre Größe daraus nicht erkannt werden kann, obwohl er dennoch per se vollkommen offenkundig ist; denn für $k = \frac{gh}{f}$ wird

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \int dz\sqrt{\frac{f(f+gzz)}{h(f+gzz)}} = \int dz\sqrt{\frac{f}{h}} = C + z\sqrt{\frac{f}{h}}$$

sein, sodass in Wahrheit wegen $gh = fk$

$$C - \frac{fk-fk}{fk}\sqrt{\frac{-f}{k}}\Pi\frac{fk}{fk-fk}\left(1-z\sqrt{\frac{-k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk-fk}\right] = z\sqrt{\frac{f}{h}}$$

ist, obgleich die Begründung für diese Gleichheit schwer erkannt wird, weil diese Formel eher den einer unendlichen Abszisse entsprechenden Parabelbogen, welcher aber mit einem verschwindendem Faktor multipliziert worden ist, anzuzeigen scheint. Wenn wir indes betrachten, dass der Parabelbogen, der der unendlichen Abszisse entspricht, zur Abszisse das Verhältnis der Gleichheit hat, wird

$$\Pi\frac{fk}{fk-fk}\left(1-z\sqrt{\frac{-k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk-fk}\right] = \frac{fk}{fk-fk}\left(1-z\sqrt{\frac{-k}{h}}\right)$$

sein, welcher Bogen mit dem Faktor

$$\frac{-(fk-fk)}{fk}\sqrt{\frac{-f}{k}}$$

multipliziert das endliche Produkt

$$= -\left(1 - z\sqrt{\frac{-k}{h}}\right)\sqrt{\frac{-f}{k}} = -\sqrt{\frac{-f}{k}} + z\sqrt{\frac{f}{h}}$$

liefert, welcher Wert hervorragend mit der Wahrheit übereinstimmt. Die übrigen Schwierigkeiten wollen wir beim Durchgehen partikulärer Fälle einzeln einer Untersuchung unterwerfen.

Integration von Fall III

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h-kzz}} = C - \frac{fk+gh}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}}\Pi\frac{fk}{fk+gh}\left(1 - z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk+gh}\right]$$

§40 Wenn f, g, h, k positive Größen bedeuten, wird der Ellipsenbogen für das Integral leicht angegeben; und auch der Fall, in dem $g = 0$ ist, bereitet keine Schwierigkeiten; denn dieser wird durch den Kreisbogen erledigt und es wird

$$\int \frac{dz\sqrt{f}}{\sqrt{h-kzz}} = C - \sqrt{\frac{f}{k}}\Pi\left(1 - z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)[1]$$

sein. Weiter kann h nicht verschwinden, weil zugleich die Differentialformel selbst imaginär wird. Aber wenn f oder k verschwindet, von welchen im ersten Fall das Integral algebraisch ist, in zweiten hingegen durch Logarithmen angegeben werden kann, bezieht sich unsere Formel auf eine verschwindende Ellipse und daraus lässt sich nichts schließen; bald werden wir aber für denselben Fall eine andere Form des Integrals darbieten, woraus die wahre Größe des Integrals leichter gefunden werden können wird.

Integration von Fall VI

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}} = C - \frac{fk-gh}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}}\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1 - z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right]$$

wenn $fk > gh$ war

§41 Hier taucht wiederum keine Schwierigkeit auf, welche Werte auch immer den Buchstaben f, g, h und k zugeteilt werden, solange nur $fk > gh$ gilt; denn das Integral wird immer durch einen Ellipsenbogen ausgedrückt und es auch der Fall $g = 0$ stellt keine Herausforderung dar, in welchem wie zuvor ein Kreisbogen bezeichnet wird. Aber wenn $k = 0$ ist, und auch f und h nicht verschwinden, kann die Bedingung $fk > gh$ nicht weiter erfüllt werden und so kann hier kein Umstand auftreten, außer der, wenn $fk = gh$ ist, was wir aber schon zuvor im Allgemeinen erledigt haben.

INTEGRATION VON FALL XII

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}} = C + \frac{gh-fk}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}}\Pi\frac{fk}{gh-fk}\left(z\sqrt{\frac{k}{h}-1}\right)\left[\frac{-fk}{gh-fk}\right]$$

WENN $gh > fk$ WAR

§42 In diesem Fall wird das Integral durch einen Hyperbelbogen definiert, wo weder g noch k negativ werden können. Wenn $f = 0$ war, in welchem Fall das Integral algebraisch wird, verschwindet die Achse der Hyperbel und daher wird der Wert des Integrals nicht erkannt. Aber wenn $h = 0$ ist, wird die notwendige Bedingung $gh > fh$ verletzt, die Schwierigkeit besteht also einzig im Fall $f = 0$, welche aber in anderen für diesen selben Fall unten anzugebenden Formeln beseitigt werden wird.

PROBLEM 4

§43 *Die Integralformel*

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$$

durch Substitution in eine andere ihr ähnliche zu überführen.

LÖSUNG

Dem, der eine Substitution der Form $z = \sqrt{\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta xx}}$ versucht, wird klar werden, dass $x = \sqrt{h+kzz}$ genommen werden muss; daher wird

$$z = \sqrt{\frac{xx-h}{k}}, \quad dz = \frac{xdx}{\sqrt{k(xx-h)}} \quad \text{und} \quad f+gzz = \frac{fk-gh+gxx}{k}$$

und daher

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{fk-gh+gxx}{xx-h}},$$

welche Geltung hat, sofern k eine positive Größe ist, weil ja dann $xx-h=kzz$ eine positive Größe ist. Wenn aber k eine negative Größe war und daher $h-xx$ positiv, ist die Transformation so darzustellen

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{gh-fk-gxx}{h-xx}}.$$

KOROLLAR 1

§44 Die Formel

$$\int dx\sqrt{\frac{fk-gh+gxx}{xx-h}}$$

mit der anfangs allgemein integrierten

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$$

vergleichend werden wir $z=x$, $f=fk-gh$, $g=g$, $h=-h$, $k=1$ haben, woher $fk-gh=fk$ ist und das Integral

$$\int dx\sqrt{\frac{fk-gh+gxx}{xx-h}} = C-\frac{fk}{fk-gh}\sqrt{-fk+gh}\Pi\frac{fk-gh}{fk}\left(1-x\sqrt{\frac{1}{h}}\right)\left[\frac{fk-gh}{fk}\right].$$

KOROLLAR 2

§45 Nach Einsetzen dieses Wertes, weil $x=\sqrt{h+kzz}$ ist, wird

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C+\frac{f}{\sqrt{gh-fk}}\Pi\frac{gh-fk}{fk}\left(\frac{\sqrt{h+kzz}}{\sqrt{h}}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right]$$

sein; damit dieser Bogen reell ist, ist es notwendig, dass zuerst $gh-fk>0$ ist, dann aber zusätzlich $h>0$. Er wird sich also auf die Hyperbel beziehen, wenn fk eine positive Größe und k positiv ist; er kann aber nicht für eine Ellipse sein, wenn k keine negative Größe ist, f aber positiv, weil in diesem Fall fk eine negative Größe sein muss.

KOROLLAR 3

§46 In gleicher Weise gibt die andere Form $\int dx\sqrt{\frac{gh-fk-gxx}{h-xx}}$ mit der kanonischen $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ verglichen $z = x$, $f = gh - fk$, $g = -g$, $h = h$ und $k = -1$; daher wird $fk - gh = fk$ und

$$\int dx\sqrt{\frac{gh-fk-gxx}{h-xx}} = C - \frac{fk}{fk-gh}\sqrt{gh-fk}\Pi\frac{fk-gh}{fk}\left(1 - x\sqrt{\frac{1}{h}}\right)\left[\frac{fk-gh}{fk}\right].$$

KOROLLAR 4

§47 Nachdem also für x der Wert $\sqrt{h+kzz}$ eingesetzt worden ist, wird wie zuvor

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C + \frac{f}{\sqrt{gh-fk}}\Pi\frac{gh-fk}{-fk}\left(1 - \frac{\sqrt{h+kzz}}{\sqrt{h}}\right)\left[\frac{gh-fk}{-fk}\right]$$

sein, welche nur Geltung haben kann, wenn $gh - fk$ und h eine positive Größe ist. Sie wird für die Ellipse sein, wenn k eine negative und f eine positive Größe ist, anderenfalls aber für die Hyperbel, wenn k und g positiv sind, so wie sie schon zuvor definiert haben, sodass es nicht vonnöten war, diese zwei Fälle zu unterscheiden.

KOROLLAR 5

§48 Nach einem Vergleich dieser beiden allgemeinen Integralformeln der Form $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ miteinander werden wir

$$\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1 - z\sqrt{\frac{-k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right] = \frac{-fk\sqrt{fk}}{(fk-gh)^{\frac{3}{2}}}\Pi\frac{fk-gh}{fk}\left(1 - \frac{\sqrt{h+kzz}}{\sqrt{h}}\right)\left[\frac{fk-gh}{fk}\right]$$

haben, welche Gleichheit, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{fk}{fk-gh} = \frac{m}{n} \quad \text{und} \quad z\sqrt{\frac{-k}{h}} = t$$

setzt, in diese Form übergeht

$$\Pi\frac{m}{n}(1-t)\left[\frac{m}{n}\right]=\frac{-m\sqrt{m}}{n\sqrt{n}}\left(1-\sqrt{1-tt}\right)\left[\frac{n}{m}\right].$$

KOROLLAR 6

§49 Also wird ein gewisser der Abszisse $= 1-t$ entsprechende Ellipsenbogen, wobei die Halbachse $= \frac{m}{n}$ ist, auf den Bogen einer anderen Ellipse zurückgeführt, deren Halbachse $= \frac{n}{m}$ und Abszisse $= 1-\sqrt{1-tt}$ ist, und das, indem man diesen Bogen mit $\frac{m\sqrt{m}}{n\sqrt{n}}$ multipliziert, der Grund für welche Gleichheit die Ähnlichkeit der zwei Ellipsen ist. Aber der Hyperbelbogen kann nicht in gleicher Weise auf einen anderen zurückgeführt werden, weil wegen des negativen $\frac{m}{n}$ natürlich $\sqrt{\frac{m}{n}}$ imaginär wird.

SCHOLION

§50 Daher erhalten wir neue reell ausgedrückte Integrationen; die erste, den Hyperbelbogen involvierende, gibt § 45 an die Hand, wo diese Bedingungen erfüllt sein müssen

$$1.\ h>0,\quad 2.\ k>0,\quad 3.\ f>0\quad \text{und}\quad 4.\ gh>fk,$$

woher wegen $h > 0$ auch $g > 0$ sein wird; und in diesen ist auch Fall II von den in § 38 aufgezählten enthalten. Weiter wird der Ellipsenbogen die Aufgabe unter diesen Bedingungen lösen

$$1.\ k<0,\quad 2.\ h>0,\quad 3.\ gh-fk>0\quad \text{und}\quad 4.\ f>0\ \text{ wegen} -fk>0,$$

woher g nun sogar positiv und negativ genommen werden kann. Wenn es positiv genommen wird, geht III hervor, wenn negativ, Fall IV, welche schon oben gelöst worden sind. Es ist aber im Allgemeinen zu bemerken, dass vermöge des vorhergehenden Paragraphen alle Ellipsenbogen in zweifacher Weise ausgedrückt werden können. Daher werden sich die Integrale dieser drei Fälle so verhalten.

INTEGRATION VON FALL II

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=C+\frac{f}{\sqrt{gh-fk}}\Pi\frac{gh-fk}{fk}\left(\frac{\sqrt{h+kzz}}{\sqrt{h}}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right]$$

WENN $gh > fk$ WAR

§51 Wegen der Bedingung $gh > fk$ können weder g noch h verschwinden. Wenn f verschwindet, geht die Hyperbel in die Parabel über, deren der unendlichen Abszisse entsprechende Bogen hier angezeigt wird, welcher also der Abszisse gleich anzusehen ist; daher wird man für den Fall $f = 0$ dieses Integral haben

$$\int dz\sqrt{\frac{gzz}{h+kzz}} = C + \frac{\sqrt{gh}}{k}\left(\frac{\sqrt{h+kzz}}{\sqrt{h}} - 1\right) = C + \frac{\sqrt{g(h+kzz)}}{k},$$

was vollkommen mit der Wahrheit verträglich ist.

SCHOLION

§52 Der andere die Aufgabe lösende Fall ist der, in dem $k = 0$ ist und die Hyperbel wiederum in die Parabel übergeht. Aber wegen $k = 0$ wird

$$\sqrt{1+\frac{kzz}{h}} - 1 = \frac{kzz}{2h}$$

sein; daher wird die Integration mithilfe eines Parabelbogens ausgeführt, und zwar auf diese Weise

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h}} = C + \frac{f}{\sqrt{gh}}\Pi\frac{gzz}{2f}[\infty],$$

welche mit derselben gewohnten Operation gefunden wird. Wenn darüber hinaus $g = 0$ wäre, wäre wegen

$$\Pi\frac{gzz}{2f} = z\sqrt{\frac{g}{f}}$$

(§ 13)

$$\int dz\sqrt{\frac{f}{h}} = C + z\sqrt{\frac{f}{h}}.$$

INTEGRATION VON FALL III

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h-kzz}} = C + \frac{f}{\sqrt{gh+fk}}\Pi\frac{gh+fk}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{h-kzz}}{\sqrt{h}}\right)\left[\frac{gh+fk}{fk}\right]$$

§53 Daher wird der Fall $h = 0$ von selbst ausgeschlossen; deswegen bleiben drei singuläre übrig. Wenn zuerst $k = 0$ ist, geht die Ellipse in die Parabel über und wegen

$$1 - \sqrt{1 - \frac{kzz}{h}} = \frac{kzz}{2h}$$

hat man wie zuvor

$$\int dz \sqrt{\frac{f + gzz}{h}} = C + \frac{f}{\sqrt{gh}} \Pi \frac{gzz}{2f} [\infty];$$

wenn darauf $f = 0$ ist, geht erneut die Parabel und der der unendlichen Abszisse entsprechende und daher als selbiger gleich anzusehende Bogen hervor, woher

$$\int dz \sqrt{\frac{gzz}{h - kzz}} = C + \frac{\sqrt{gh}}{k} \left(1 - \frac{\sqrt{h - kzz}}{\sqrt{h}}\right) = C - \frac{\sqrt{g(h - kzz)}}{k}$$

wird; wenn drittens $g = 0$ ist, geht die Ellipse in den Kreis über und es wird

$$\int dz \sqrt{\frac{f}{h - kzz}} = C + \frac{f}{\sqrt{fk}} \Pi \left(1 - \frac{\sqrt{h - kzz}}{\sqrt{h}}\right) [1];$$

und so haben wir die oben in § 40 erwähnten schwierigeren Fälle erledigt.

INTEGRATION VON FALL VI

$$\int dz \sqrt{\frac{f - gzz}{h - kzz}} = C + \frac{f}{\sqrt{fk - gh}} \Pi \frac{fk - gh}{fk} \left(1 - \frac{\sqrt{h - kzz}}{\sqrt{h}}\right) \left[\frac{fk - gh}{fk}\right]$$

WENN NUR $fk > gh$ WAR

§54 In diesem Fall bleibt genauso wie oben in § 41, wo derselbe behandelt worden ist, keine Schwierigkeit zurück, weil wegen $fk > gh$ weder f noch k verschwinden können, und auch h kann nicht verschwinden, weil der Nenner $h - kzz$ sonst negativ wird. Aber wenn $g = 0$ ist, taucht keine Schwierigkeit auf, weil die Integration auf den Kreisbogen zurückgeführt wird.

SCHOLION

§55 Deshalb haben wir mit dieser Reduktion das gewonnen, dass wir nun außer den zuvor entwickelten Fällen III, VI und XII auch Fall II erledigt haben. Aber die übrigen acht Fälle können auf keine Weise mithilfe von einfachen reellen Bogen integriert werden, sondern enthalten zusätzlich einen algebraischen Teil; Ja einige umfassen sogar außer diesem algebraischen Teil zwei Bogen, der eine elliptisch, der andere hyperbolisch. Um aber diese Integrale zu untersuchen, ist es notwendig, dass wir andere affine außer der Variable z die zwei Wurzeln $\sqrt{f+gzz}$ und $\sqrt{h+kzz}$ involvierende Integralformeln betrachten, welche auf die Form $\int dx\sqrt{\frac{\alpha+\beta xx}{\gamma+\delta xx}}$ zurückführbar sind.

PROBLEM 5

§56 *Andere außer der Variable z die beiden Wurzeln*

$$\sqrt{f+gzz} \quad \textit{und} \quad \sqrt{h+kzz}$$

enthaltenden Integralformeln zu finden, deren Integration auf die Form

$$\int dx\sqrt{\frac{\alpha+\beta xx}{\gamma+\delta xx}}$$

zurückgeführt werden kann.

LÖSUNG

Dies geschieht vermöge von Substitutionen, von welchen wir die wesentlichen hier durchgehen wollen.

1. Es sei $x=\frac{1}{z}$; es wird $z=\frac{1}{x}$, $\sqrt{f+gzz}=\frac{\sqrt{fxx+g}}{x}$ und $\sqrt{h+kzz}=\frac{\sqrt{hxx+k}}{x}$ sein. Daher wird wegen $dx=-\frac{dz}{zz}$

$$dx\sqrt{\frac{fxx+g}{hxx+k}}=-\frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$$

und daher

$$\int\frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=-\int dx\sqrt{\frac{fxx+g}{hxx+k}}.$$

2. Man setze $x = \sqrt{f+gzz}$; es wird $dx = \frac{gzdz}{\sqrt{f+gzz}}$, $z = \sqrt{\frac{xx-f}{g}}$ und $\sqrt{h+kzz} = \sqrt{\frac{gh-fk+kxx}{g}}$ sein, woraus man

$$dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}} = \frac{gzzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}$$

und

$$dx\sqrt{\frac{gh-fk+kxx}{xx-f}} = gdz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} \quad \text{(wegzulassen)}$$

konstruiert wird, weshalb

$$\int \frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = \frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}}$$

sein wird.

3. Wenn $x = \sqrt{h+kzz}$ gesetzt wird, wird in gleicher Weise

$$\int \frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = \frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{xx-h}{fk-gh+gxx}}.$$

4. Sei sei $x = \frac{1}{\sqrt{f+gzz}}$; es wird $dx = \frac{-gzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}$, $z = \frac{\sqrt{1-fxx}}{x\sqrt{g}}$, $\sqrt{f+gzz} = \frac{1}{x}$ und $\sqrt{h+kzz} = \sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{gxx}}$ sein, woher

$$dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}} = \frac{-gzzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h+kzz}}$$

und

$$dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}} = \frac{-gdz\sqrt{h+kzz}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}$$

wird und daher

$$\int \frac{zzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h+kzz}} = -\frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-gk)xx}}$$

und

$$\int \frac{dz\sqrt{h+kzz}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}}.$$

5. Wenn in gleicher Weise $x = \frac{1}{\sqrt{h+kzz}}$ gesetzt wird, findet man

$$\int \frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}} = -\frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}},$$

$$\int \frac{dz\sqrt{f+gzz}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}}.$$

6. Man setze $x = \frac{z}{\sqrt{f+gzz}}$; es wird $dx = \frac{fdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}$ sein, dann $z = \frac{x\sqrt{f}}{\sqrt{1-gxx}}$, $\sqrt{f+gzz} = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{1-gxx}}$ und $\sqrt{h+kzz} = \sqrt{\frac{h+(fk-gh)xx}{1-gxx}}$, woher man konstruiert

$$dx\sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}} = \frac{fdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h+kzz}},$$

$$dx\sqrt{\frac{h+(fk-gh)xx}{1-gxx}} = \frac{fdz\sqrt{h+kzz}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}.$$

Daher

$$\int \frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h+kzz}} = \frac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}},$$

$$\int \frac{dz\sqrt{h+kzz}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{h+(fk-gh)xx}{1-gxx}}.$$

7. Indem man in gleicher Weise $x = \frac{z}{\sqrt{h+kzz}}$ setzt, findet man

$$\int \frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}} = \frac{1}{h}\int dx\sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}},$$

$$\int \frac{dz\sqrt{f+gzz}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{h}\int dx\sqrt{\frac{f+(gh-fk)xx}{1-kxx}}.$$

8. Man setze $x = \frac{\sqrt{f+gzz}}{z}$; es wird $dx = -\frac{-fdz}{zz(\sqrt{f+gzz})}$ sein, dann $z = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{xx-g}}$, $\sqrt{f+gzz} = \frac{\sqrt{fx}}{\sqrt{xx-g}}$ und $\sqrt{h+kzz} = \sqrt{\frac{hxx+fk-gh}{xx-g}}$, woher

$$dx\sqrt{\frac{hxx+fk-gh}{xx-g}} = \frac{-fdz\sqrt{h+kzz}}{zz\sqrt{f+gzz}}$$

und

$$dx\sqrt{\frac{xx-g}{hxx+fk-gh}} = \frac{-fdz}{zz\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}$$

wird, woraus man ableitet

$$\int \frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} = -\frac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{hxx+fk-gh}{xx-g}},$$

$$\int \frac{dz}{zz\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = -\frac{1}{f}\int \sqrt{\frac{xx-g}{hxx+fk-gh}}.$$

9. In gleicher Weise wird man durch Setzen von $x = \frac{\sqrt{h+kzz}}{z}$

$$\int \frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = -\frac{1}{h}\int dx\sqrt{\frac{fxx-fk+gh}{xx-k}},$$

$$\int \frac{dz}{zz\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = -\frac{1}{h}\int dx\sqrt{\frac{xx-k}{fxx-fk+gh}}$$

finden.

10. Man setze $x = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$; es wird $dx = \frac{(gh-fk)zdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}}$ sein, dann $z = \sqrt{\frac{hxx-f}{g-kxx}}$, woher man schließt

$$\int \frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}} = \frac{1}{gh-fk}\int dx\sqrt{\frac{hxx-f}{g-kxx}},$$

$$\int \frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}} = \frac{1}{gh-fk}\int dx\sqrt{\frac{g-kxx}{hxx-f}}.$$

11. Indem man in gleicher Weise $x = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$ setzt, findet man

$$\int \frac{zzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h+kzz}} = \frac{1}{fk-gh}\int dx\sqrt{\frac{fxx-h}{k-gxx}},$$

$$\int \frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h+kzz}} = \frac{1}{fk-gh}\int dx\sqrt{\frac{k-gxx}{fxx-h}}.$$

Korollar 1

§57 Die Formeln ordnend, weil jede von ihnen in zweifacher Weise auf eine gefällige Form zurückgeführt wird, werden wir zuerst

$$\int \frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = -\int dx\sqrt{\frac{fxx+g}{hxx+k}} = -\frac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{fyy-fk+gh}{yy-k}}$$

haben, wobei

$$x = \frac{1}{z} \quad \text{und} \quad y = \frac{\sqrt{h+kzz}}{z}$$

ist; dann

$$\int \frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} = -\int dx\sqrt{\frac{hxx+k}{fxx+g}} = -\frac{1}{f}\int dy\sqrt{\frac{hyy+fk-gh}{yy-g}}$$

mit

$$x = \frac{1}{z} \quad \text{und} \quad y = \frac{\sqrt{f+gzz}}{z}.$$

Korollar 2

§58 Betrachte diese zweite Form

$$\int \frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = \frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}} = \frac{1}{k}\int dy\sqrt{\frac{yy-h}{fk-gh+gyy}}$$

mit

$$x = \sqrt{f+gzz} \quad \text{und} \quad y = \sqrt{h+kzz},$$

welche durch Vertauschen der Formeln $\sqrt{f+gzz}$ und $\sqrt{h+kzz}$ nicht verändert wird.

KOROLLAR 3

§59 Die dritte Form stelle man so dar

$$\int \frac{dz\sqrt{f+gzz}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}} = \frac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$$

mit

$$x = \frac{1}{\sqrt{h+kzz}} \quad \text{und} \quad y = \frac{z}{\sqrt{h+kzz}},$$

$$\int \frac{dz\sqrt{h+kzz}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}} = \frac{1}{f}\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$$

mit

$$x = \frac{1}{\sqrt{f+gzz}} \quad \text{und} \quad y = \frac{z}{\sqrt{f+gzz}}.$$

KOROLLAR 4

§60 Als vierte Form setze man diese fest

$$\int \frac{dz}{zz\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = -\frac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{xx-g}{hxx+fk-gh}} = -\frac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{yy-k}{fyy-fk+gh}}$$

mit

$$x = \frac{\sqrt{f+gzz}}{z} \quad \text{und} \quad y = \frac{\sqrt{h+kzz}}{z}.$$

KOROLLAR 5

§61 Die fünfte Form wird eine doppelte sein, nämlich

$$\int \frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h+kzz}} = \frac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}} = \frac{1}{fk-gh}\int dy\sqrt{\frac{k-gyy}{fyy-h}}$$

mit

$$x = \frac{z}{\sqrt{f+gzz}} \quad \text{und} \quad y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}},$$

$$\int \frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}} = \frac{1}{h}\int dx\sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}} = \frac{1}{gh-fk}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{hyy-f}}$$

mit

$$x = \frac{z}{\sqrt{h+kzz}} \quad \text{und} \quad y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}.$$

KOROLLAR 6

§62 Schließlich wird die sechste Form sein:

$$\int \frac{zzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h+kzz}} = -\frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}} = \frac{1}{fk-gh}\int dy\sqrt{\frac{fyy-k}{k-gyy}}$$

mit

$$x = \frac{1}{\sqrt{f+gzz}} \quad \text{und} \quad y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}},$$

$$\int \frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}} = -\frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}} = \frac{1}{gh-fk}\int dy\sqrt{\frac{hyy-f}{g-kyy}}$$

mit

$$x = \frac{1}{\sqrt{h+kzz}} \quad \text{und} \quad y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}.$$

Problem 6

§63 *Fälle zu finden, in denen der Ausdruck* $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ *gleich der algebraischen Größe* $\alpha z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ *zusammen mit dem Bogen eines Kegelschnitt ist.*

Lösung

Man setze $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \alpha z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + Z$ und durch Differenzieren wird

$$dZ = \frac{dz((1-\alpha)fh + (fk + (1-2\alpha)gh)zz + (1-\alpha)gkz^4)}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}}$$

sein, wo der Zähler weder durch $f+gzz$ noch durch $h+kzz$ teilbar gemacht werden kann, dass zugleich $fk = gh$ wird; Z wird aber auf die letzte Form in § 62 zurückgeführt werden, indem man $\alpha = 1$ gesetzt wird, und es wird

$$Z = (fk - gh)\int \frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}}$$

sein. Daher werden wir entweder

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + \frac{gh-fk}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}}$$

mit

$$x = \frac{1}{\sqrt{h+kzz}}$$

oder auch

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} - \int dy\sqrt{\frac{hyy-f}{g-kyy}}$$

mit

$$y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$$

haben.

KOROLLAR 1

§64 Sooft also entweder die Formel $\int dx\sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}}$ oder diese $\int dy\sqrt{\frac{hyy-f}{g-kyy}}$ auf einen der schon behandelten Fälle zurückgeführt werden kann, wird auch die Formel $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ teils eine algebraischen Größe und teils dem Bogen eines Kegelschnitts gleich werden.

KOROLLAR 2

§65 Weil $x = \frac{1}{\sqrt{h+kzz}}$ ist, wird $1 - hxx = kxxzz$ sein; wenn also k keine positive Größe ist, kann die erste Formel nicht so, wie wir es getan haben, dargestellt werden. Natürlich muss sie, wenn k eine negative Größe ist, so geschrieben werden

$$\int dx\sqrt{\frac{hxx-1}{(gh-fk)xx-g}}.$$

KOROLLAR 3

§66 In der anderen Formel $\int dy\sqrt{\frac{hyy-f}{g-kyy}}$, mit $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$, weil ja $hyy - f = \frac{(gh-fk)zz}{h+kzz}$, wird $gh > fk$ angenommen. Daher, wenn $gh < fk$ war, muss $\int dy\sqrt{\frac{f-hyy}{-g+kyy}}$ geschrieben werden. Die erste Schreibweise hat Geltung, wenn $gh - fk > 0$ ist, die andere hingegen, wenn $fk - gh > 0$ ist.

BEISPIEL 1

§67 Man reduziere die Form $\int dx\sqrt{\dfrac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}}$ auf Fall III und es muss $k > 0$, $h < 0$, $g > 0$ und $fk - gh < 0$ sein, woher $f < 0$ ist, und man wird

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}} = z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}} + \frac{fk-gh}{k}\int dx\sqrt{\frac{1+hxx}{g-(fk-gh)xx}}$$

haben, wo $fk > gh$ sein muss. Nun wird nach § 40

$$\int dx\sqrt{\frac{1+hxx}{g-(fk-gh)xx}} = C - \frac{fk}{(fk-gh)^{\frac{3}{2}}}\Pi\frac{fk-gh}{fk}\left(1-x\sqrt{\frac{fk-gh}{g}}\right)\left[\frac{fk-gh}{fk}\right]$$

sein oder nach § 53

$$\int dx\sqrt{\frac{1+hxx}{g-(fk-gh)xx}} = C+\frac{1}{\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1-\frac{\sqrt{g-(fk-gh)xx}}{\sqrt{g}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right],$$

wo

$$x=\frac{1}{\sqrt{-h+kzz}} \quad \text{und} \quad \sqrt{g-(fk-gh)xx}=\frac{\sqrt{k(gzz-f)}}{\sqrt{-h+kzz}}$$

ist; und so wird Fall XI konstruiert.

Integration von Fall XI

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}$$

$$=C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}-\frac{f}{\sqrt{fk-gh}}\Pi\frac{fk-gh}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{fk-gh}}{\sqrt{g(-h+kzz)}}\right)\left[\frac{fk-gh}{fk}\right]$$

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}$$

$$=C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}+\frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1-\frac{\sqrt{k(-f+gzz)}}{g(-h+kzz)}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right]$$

§68 Daher besteht dieses Integral aus einem algebraischen Teil und einem Ellipsenbogen, und weil $fk>gh$ sein muss, kann es nicht $=0$ sein; wenn aber $h=0$ ist, geht die Ellipse in einen Kreis über und man wird

$$\int\frac{dz}{z}\sqrt{\frac{-f+gzz}{k}}=C+\sqrt{\frac{-f+gzz}{k}}-\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{k}}\Pi\left(1-\frac{\sqrt{f}}{z\sqrt{g}}\right)[1]$$

oder

$$\int\frac{dz}{z}\sqrt{\frac{-f+gzz}{k}}=C+\sqrt{\frac{-f+gzz}{k}}+\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{k}}\Pi\left(1-\frac{\sqrt{-f+gzz}}{z\sqrt{g}}\right)[1]$$

haben, wie man leicht durch Integration findet.

Beispiel 2

§69 Man reduziere die Formel $\int dx\sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}}$ auf Fall VI und es wird $h>0$, $g>0$, $gh-fk>0$ und $k>0$ sein; weil aber in diesem Fall $gh-fk>gh$ sein muss, kann f nicht negativ genommen werden, dass für $x=\frac{1}{\sqrt{h+kzz}}$ gesetzt

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{h+kzz}}=z\sqrt{\frac{-f+gzz}{h+kzz}}+\frac{gh+fk}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-hxx}{g-(fk+gh)xx}}$$

ist. Aber aus § 41 hat man

$$\int dx\sqrt{\frac{1-hxx}{g-(fk+gh)xx}}=C-\frac{fk}{(fk+gh)^{\frac{3}{2}}}\Pi\frac{fk+gh}{fk}\left(1-x\sqrt{\frac{fk+gh}{g}}\right)\left[\frac{fk+gh}{fk}\right],$$

womit Fall IX erledigt ist.

Integration von Fall IX

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{h+kzz}}$$
$$=C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{h+kzz}}-\frac{f}{\sqrt{fk+gh}}\Pi\frac{fk+gh}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{fk+gh}}{\sqrt{g(h+kzz)}}\right)\left[\frac{fk+gh}{fk}\right]$$

§70 Das Integral dieses Fall besteht also teils aus einem algebraischen Teil und einem Ellipsenbogen, der wie immer noch auf eine andere Weise ausgedrückt werden könnte; aber es ist jene Ellipse vorzuziehen, deren Achse den Parameter überragt, damit sie nicht in bestimmten Fällen verschwinden kann. Im Übrigen hätten wieder diesen Fall aus dem vorhergehenden XI ableiten können, indem wir h als negativ festlegen, und wenn wir in der letzten Form $gh>fk$ setzen, werden wir die andere Integration von Fall XII haben.

Integration von Fall XII

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}$$
$$=C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}-\frac{gh-fk}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh-fk}\left(\frac{\sqrt{k(-f+gzz)}}{\sqrt{g(-h+kzz}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh-fk}\right]$$

§71 Sieh also die andere Integration des schon oben in § 42 behandelten Falles, welche außer dem Hyperbelbogen einen algebraischen Teil enthält, während die erste allein durch den Hyperbelbogen ausgedrückt wird. Die Gleichheit dieser zwei Ausdrücke verdient es also betrachtet zu werden; damit dies auf angenehmere Weise geschieht, wollen wir $\frac{fk}{gh-fk} = \frac{m}{n}$ und $z\sqrt{\frac{k}{h}} = t$ setzen und es wird

$$\Pi\frac{m}{n}(t-1)\left[\frac{-m}{n}\right] + \Pi\frac{m}{n}\left(\sqrt{\frac{(m+n)tt-m}{(m+n)(tt-1)}}-1\right)\left[\frac{-m}{n}\right]$$
$$= C + \frac{m}{n}t\sqrt{\frac{(m+n)tt-m}{m(tt-1)}}$$

sein, woher nach entsprechender Bestimmung der Konstante verschiedene Hyperbogen miteinander verglichen werden können. Nachdem die Halbachse $\frac{m}{n} = \alpha$ gesetzt worden und die zwei Variablen t und u genommen worden sind, wird

$$\left.\begin{array}{r} +\Pi\alpha(t-1)[-\alpha] + \Pi\alpha\left(\dfrac{(\alpha+1)tt-\alpha}{(\alpha+1)(tt-1)}-1\right)[-\alpha] \\ +\Pi\alpha(u-1)[-\alpha] + \Pi\alpha\left(\dfrac{(\alpha+1)uu-\alpha}{(\alpha+1)(uu-1)}-1\right)[-\alpha] \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} +\alpha t\sqrt{\dfrac{(\alpha+1)tt-\alpha}{\alpha(tt-1)}} \\ +\alpha u\sqrt{\dfrac{(\alpha+1)uu-\alpha}{\alpha(uu-1)}} \end{array}\right.$$

sein.

BEISPIEL 3

§72 Wir wollen f und k negativ festlegen und der zweite Ausdruck gibt

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}} = z\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}} - \int dy\sqrt{\frac{f+hyy}{g+kyy}}$$

mit $gh > fk$. Aus dem in §52 behandelten Fall haben wir

$$\int dy\sqrt{\frac{f+hyy}{g+kyy}} = C + \frac{f}{\sqrt{gh-fk}}\Pi\frac{gh-fk}{fk}\left(\frac{\sqrt{g+kyy}}{\sqrt{g}}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right].$$

Weil also

$$y = \sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}}, \quad \text{ist, wird} \quad \sqrt{g+kyy} = \frac{\sqrt{gh-fk}}{\sqrt{h-kzz}}$$

sein, womit Fall X erledigt ist.

Integration von Fall X

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}}$$

$$= C + z\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}} - \frac{f}{\sqrt{gh-fk}}\Pi\frac{gh-fk}{fk}\left(\frac{\sqrt{gh-fk}}{\sqrt{g(h-kzz)}}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right]$$

§73 Daher besteht das Integral dieses Falles X aus einem algebraischen Teil und einem Hyperbelbogen. Wenn aber k negativ genommen wird, entspringt das schon zuvor in § 70 dargebotene Integral von Fall IX, aus welchem dieser Fall hätte abgeleitet werden können.

Beispiel 4

§74 Man nehme g und k negativ, dass $y = \sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}$ ist, und es wird

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}} = z\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}} - \int dy\sqrt{\frac{hyy-f}{kyy-g}}$$

sein. Wenn also die Form $\int dy\sqrt{\frac{hyy-f}{kyy-g}}$ auf diese Weise dargestellt wird, muss wegen der negativ genommenen g und k $fk-gh>0$ sein; dann ist sie aber nicht in Fall XII enthalten, sondern verlangt auf diese Weise $\int dy\sqrt{\frac{f-hyy}{g-kyy}}$ dargestellt $gh>fk$, welche Bedingung Fall VI, worauf sie zu beziehen wäre, widerspricht.

Scholion

§75 Mithilfe des vorhergehenden Problems haben wir also die Fälle IX,X und XI erledigt, zudem haben wir vorher schon sowohl die Fälle III, VI und XII also auch Fall II mithilfe einfacher Bogen behandelt. Es verbleiben also fünf noch nicht aufgelöste Fälle, von welchen wir einige so behandeln können werden, dass das Integral aus einem Kegelschnitt und einer algebraischen Größe der Form $z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$ besteht.

Problem 7

§76 *Fälle zu finden, in welchen der Ausdruck* $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ *einer algebraischen Größe* $\alpha z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$ *zusammen mit dem Bogen eines Kegelschnitts gleich wird.*

Lösung

Man setze

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \alpha z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + Z;$$

durch Differenzieren wird

$$dZ = \frac{dz(ff-\alpha fh + 2f(g-\alpha k)zz + g(g-\alpha k)z^4)}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h+kzz}}$$

sein, wo zu bemerken ist, dass der Zähler nicht durch $f+gzz$ teilbar gemacht werden kann, dass zugleich α verschwindet. Aber wenn wir die Form auf eine der obigen Formeln zurückführen wollen, muss $\alpha = \frac{g}{k}$ gesetzt werden, wonach

$$dZ = \frac{f(fk-gh)}{k}\cdot\frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h+kzz}}$$

entspringt, deren Integration nach § 61 bekannt ist. Daher werden wir entweder

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C + \frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{fk-gh}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}}$$

mit

$$x = \frac{z}{\sqrt{f+gzz}}$$

oder

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C + \frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{f}{k}\int dy\sqrt{\frac{k-gyy}{fyy-k}}$$

mit

$$y = \sqrt{\frac{h + kzz}{f + gzz}}$$

haben.

KOROLLAR 1

§77 Weil $x = \frac{z}{\sqrt{f+gzz}}$ ist, wird

$$1 - gxx = \frac{fxx}{zz}$$

sein; wenn also f eine positive Größe war, wird die Formel richtig auf diese Weise

$$\int dx \sqrt{\frac{1 - gxx}{h + (fk - gh)xx}}$$

ausgedrückt; wenn aber $f < 0$ ist, muss sie so dargestellt werden

$$\int dx \sqrt{\frac{gxx - 1}{(gh - fk)xx - h}}.$$

KOROLLAR 2

§78 Weil $y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$ ist, wird

$$fyy - h = \frac{(fk - gh)zz}{f + gzz}$$

sein, woher, wenn die Integralformel so dargeboten wird

$$\int dy \sqrt{\frac{k - gyy}{fyy - h}},$$

es notwendig ist, dass $fk - gh > 0$ ist; wenn sie aber so ausgedrückt wird

$$\int dy \sqrt{\frac{-k + gyy}{h - fyy}},$$

muss $gh - fk > 0$ sein.

Beispiel 1

§79 Man beziehe die Form

$$\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}}$$

auf Fall III, und weil $f>0$ ist, muss $g<0$, $h>0$ und $k<0$ genommen werden, woher man

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}=C+\frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}}+\frac{fk-gh}{k}\int dx\sqrt{\frac{1+gxx}{h-(fk-gh)xx}}$$

erhält; aber aus Fall (§ 40) ist

$$\int dx\sqrt{\frac{1+gxx}{h-(fk-gh)xx}}=\frac{-fk}{fk-gh}\sqrt{\frac{1}{fk-gh}}\Pi\frac{fk-gh}{fk}\left(1-x\sqrt{\frac{fk-gh}{h}}\right)\left[\frac{fk-gh}{fk}\right],$$

wo, weil $fk>gh$ ist, wiederum Fall VI auftaucht.

Integration von Fall VI

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}$$

$$=C+\frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}}-\frac{f}{\sqrt{fk-gh}}\Pi\frac{fk-gh}{fk}\left(1-\frac{z\sqrt{fk-gh}}{\sqrt{h(f-gzz)}}\right)\left[\frac{fk-gh}{fk}\right]$$

§80 Wenn wir die Ellipse in eine andere ihr ähnliche überführen, wird

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}$$

$$=C+\frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}}+\frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1-\frac{\sqrt{f(h-kzz)}}{\sqrt{h(f-gzz)}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right]$$

sein, welches Integral mit dem obigen in § 41 verglichen eine außergewöhnliche Relation von Ellipsenbogen. Die Halbachse aber sei

$$\frac{fk}{fk-gh}=a \quad \text{und} \quad z\sqrt{\frac{k}{h}}=t \quad \text{oder} \quad zz=\frac{htt}{k};$$

es wird

$$\sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}}=\sqrt{\frac{b}{f}\cdot\frac{a(1-tt)}{a-(a-1)tt}}$$

sein – wegen $gh=\frac{a-1}{a}fk$ –, woher

$$\Pi a(1-t)[a]+\Pi a\left(1-\sqrt{\frac{a(1-tt)}{a-(a-1)tt}}\right)[a]+(a-1)t\sqrt{\frac{a(1-tt)}{a-(a-1)tt}}=C$$

wird. Nach Nehmen der zwei Variablen t und u wird man also

$$\left.\begin{aligned} +\Pi a(1-t)[a]+\Pi a\left(1-\sqrt{\frac{a(1-tt)}{a-(a-1)tt}}\right)[a] \\ +\Pi a(1-u)[a]+\Pi a\left(1-\sqrt{\frac{a(1-uu)}{a-(a-1)uu}}\right)[a] \end{aligned}\right\}=\left\{\begin{aligned} -(a-1)t\sqrt{\frac{a(1-tt)}{a-(a-1)tt}} \\ +(a-1)u\sqrt{\frac{a(1-uu)}{a-(a-1)uu}} \end{aligned}\right.$$

haben, woher leicht von mir schon vor einiger Zeit bewiesene Vergleiche von Ellipsenbogen abgeleitet werden.
Wenn hier g negativ genommen wird, entspringt Fall III und dann wäre die Formel

$$\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{h-(fk+gh)xx}}$$

auf Fall VI zu beziehen, weshalb es nicht notwendig ist, diesen Fall zu entwickeln.

BEISPIEL 2

§81 Wenn diese Form nicht überführt wird, kann

$$\int dx\sqrt{\frac{gxx-1}{(gh-fk)xx-h}}$$

nicht auf Fall XII zurückgeführt werden, wo $f < 0$ sein muss; wir werden aber

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{h+kzz}} = C + \frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h+kzz}{-f+gzz}} - \frac{fk+gh}{k}\int dx\sqrt{\frac{gxx-1}{(fk+gh)xx-h}}$$

haben, aber nun wird sie auf Fall XI bezogen und daher werden wir den schon oben gefundenen Fall IX erhalten.

Beispiel 3

§82 Wir wollen aber die Formel

$$\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}}$$

auf Fall II zurückführen, was durch Nehmen von $g < 0$ passiert, während $f > 0$ und

$$x = \frac{z}{\sqrt{f-gzz}}$$

ist, dass man

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h+kzz}} = C - \frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f-gzz}} + \frac{fk+gh}{k}\int dx\sqrt{\frac{1+gxx}{h+(fk+gh)xx}}$$

hat, während

$$x = \frac{z}{\sqrt{f-gzz}}$$

ist, und aus § 51 wird

$$\int dx\sqrt{\frac{1+gxx}{h+(gh-fk)xx}} = \frac{1}{\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh-fk}\left(\frac{\sqrt{h+(gh-fk)xx}}{\sqrt{h}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh-fk}\right]$$

und

$$\sqrt{h+(gh-fk)xx} = \frac{\sqrt{f(h-kzz)}}{\sqrt{f-gzz}}$$

sein, womit Fall VI erledigt wird.

Integration von Fall VII

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}$$

$$= C+\frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}}-\frac{gh-fk}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh-fk}\left(\frac{\sqrt{f(h-kzz)}}{\sqrt{h(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh-fk}\right]$$

MIT $gh > fk$

§83 Dieses Integral besteht also aus einem algebraischen Teil und einem Hyperbelbogen und dieser Fall kommt neu zu den schon erledigten hinzu.

Scholion

§84 Bisher haben wir also acht Fälle mit reellen Werten integriert, nämlich II, III, VI, VII, IX, X, XI und XII, und die übrigen vier sind so beschaffen, dass sie auf keine Weise durch ähnliche Formen integriert werden können. Sie verlangen nämlich neben einem algebraischen Teil zwei Bogen, der eine elliptisch, der andere hyperbolisch, und der algebraische Teil kann entweder von dieser Form $z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ oder von dieser $z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$ angenommen werden kann; daher wird es gefällig sein, noch zwei Probleme zu entwickeln.

Problem 8

§85 *Fälle zu finden, in welchen der Ausdruck $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ der algebraischen Größen $\alpha z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ zusammen mit zwei Bogen von Kegelschnitten gleich wird.*

Lösung

Nach Setzen von

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\alpha z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}+Z$$

wird durch Differenzieren

$$dZ=\frac{dz((1-\alpha)fh+(fk+(1-2\alpha)gh)zz+(1-\alpha)gkz^4)}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}}$$

sein, welche in die zwei in den Formeln von Problem 5 enthaltenen Teil aufgelöst werde.

1. Man setze

$$Z = p\int \frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}} + q\int \frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}}$$

und es muss

$$(1-\alpha)fh = p, \quad fk + (1-2\alpha)gh = 1, \quad (1-\alpha)gk = 0$$

sein, woher wegen $\alpha = 1$ auch p entgegen der Annahme verschwände.

2. Man setze

$$Z = p\int \frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}} + q\int \frac{dz\sqrt{f+gzz}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}}$$

und es muss

$$(1-\alpha)fh = p + qf, \quad fk + (1-2\alpha)gh = qg \quad \text{und} \quad (1-\alpha)gk = 0$$

werden, woher

$$\alpha = 1, \quad q = \frac{fk-gh}{g}, \quad p = \frac{-f(fk-gh)}{g}$$

und daher

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$$

$$= C + z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{hyy-f}} - \frac{fk-gh}{gk}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}}$$

ist, mit

$$y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{\sqrt{h+kzz}}.$$

3. Man setze

$$Z = p\int \frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}} + q\int \frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}$$

und notwendigerweise ist

$$(1-\alpha)fh = p, \quad fk + (1-2\alpha)gh = qh, \quad (1-\alpha)gk = qk,$$

woher man

$$\alpha = \frac{fk}{gh}, \quad q = \frac{gh-fk}{h}, \quad p = \frac{f(gh-fk)}{g}$$

ableitet. Daher werden wir

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$$

$$= C + \frac{fk}{gh}z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{hyy-f}} + \frac{gh-fk}{gh}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}}$$

mit

$$y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} \quad \text{und} \quad x = \sqrt{f+gzz}$$

haben.

4. Man setze

$$Z = p\int \frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}} + q\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$$

und es muss

$$(1-\alpha)fh = p + qhh, \quad fk + (1-2\alpha)gh = 2qhk, \quad (1-\alpha)gk = qkk$$

sein, woher man $fk - gh = 0$ abgeleitet wird, was absurd ist.

4. Man setze

$$Z = p\int \frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}} + q\int \frac{dz\sqrt{f+gzz}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}};$$

es wird

$$(1-\alpha)fh = qf, \quad fk + (1-2\alpha)gh = p + qg \quad \text{und} \quad (1-\alpha)gk = 0$$

werden, woher sich wegen $q = 0$ nicht ableiten lässt.

6. Man setze

$$Z = p\int \frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gzz}} + q\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$$

und es wird

$$(1-\alpha)fh = qhh, \quad fk + (1-2\alpha)gh = p + 2qhk, \quad (1-\alpha)gk = qkk$$

werden, woher in gleicher Weise nichts abgeleitet werden kann.

7. Man setze

$$Z = p\int \frac{dz\sqrt{f+gzz}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}} + q\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$$

und es wird

$$(1-\alpha)fh = pf + qhh, \quad fk + (1-2\alpha)gh = pq + 2qhk, \quad (1-\alpha)gk = qkk$$

sein, woher man

$$\alpha = \frac{gh-gk}{gh}, \quad p = \frac{fk-gh}{g}, \quad q = \frac{f}{h}$$

findet. Daher wird

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$$

$$= C + \frac{gh-fk}{gh} z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + \frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{fk-gh}{gh}\int dy\sqrt{\frac{f-(fk-gh)yy}{1-kyy}}$$

mit

$$y = \frac{z}{\sqrt{h+kzz}}$$

sein. Mehr geeignete Kombinationen lassen sich nicht konstruieren.

Korollar 1

§86 Aus der letzten Annahme folgt unmittelbar die Integration von Fall I, in welchem $fk > gh$ ist; denn aus Fall II ist

$$\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} = \frac{h}{\sqrt{fk-gh}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{f}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right],$$

darauf ist aus Fall VI (§ 41)

$$\int dy\sqrt{\frac{f-(fk-gh)yy}{1-kyy}} = \frac{-gh}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}}\Pi\frac{fk}{gh}(1-y\sqrt{k})\left[\frac{fk}{gh}\right]$$

und daher erschließt man

Integration von Fall I

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$$

$$= C - \frac{fk-gh}{gh}z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + \frac{f}{\sqrt{fk-gh}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{f}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

$$-\frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{z\sqrt{k}}{\sqrt{h+kzz}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right].$$

KOROLLAR 2

§87 Aus Annahme Nummer 3 scheint Fall V abgeleitet werden zu können, woraus

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h+kzz}} = \frac{-fk}{gh}z\sqrt{\frac{f-gzz}{h+kzz}} - \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g+kyy}{f-hyy}} + \frac{fk+gh}{gh}\int dx\sqrt{\frac{f-xx}{fk+gh-kxx}}$$

mit

$$y=\sqrt{\frac{f-gzz}{h+kzz}} \quad \text{und} \quad x=\sqrt{f-gzz}$$

wird; aber diese letzte Formel kann aus Fall VI nicht konstruiert werden und das auch nicht aus Annahme Nummer 2.

KOROLLAR 3

§88 Wir wollen Form VIII betrachten, wo g und h negativ sind, $fk > gh$, und durch Übertragung von Hypothese Nummer 3 hierauf werden wir

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}} = \frac{fk}{gh}z\sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}} - \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g+kyy}{f+hyy}} + \frac{gh-fk}{gh}\int dx\sqrt{\frac{f-xx}{fk-gh-kxx}}$$

mit

$$y=\sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}} \quad \text{und} \quad x=\sqrt{f-gzz}$$

haben; nun ist aber aus Fall II

$$\int dy\sqrt{\frac{g+kyy}{f+hyy}} = \frac{g}{\sqrt{fk-gh}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{f+hyy}}{\sqrt{f}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

mit

$$\sqrt{f+hyy}=\frac{z\sqrt{fk-gh}}{\sqrt{-h+kzz}},$$

darauf aus Fall VI

$$\int dx\sqrt{\frac{f-xx}{fk-gh-kxx}} = \frac{-gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-x\sqrt{\frac{k}{fk-gh}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right],$$

woher folgt:

INTEGRATION VON FALL VIII

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}}$$

$$= C+\frac{fk}{gh}z\sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}}-\frac{f}{\sqrt{fk-gh}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{z\sqrt{fk-gh}}{\sqrt{f(-h+kzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

$$+\frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{k(f-gzz)}}{\sqrt{fk-gh}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$

SCHOLION

§89 So haben wir also zwei neue Fälle, I und VIII, erlangt, sodass nur IV und V übrig sind, welche sich mithilfe des folgenden Problems behandeln lassen werden.

PROBLEM 9

§90 *Fälle zu finden, in denen der Ausdruck $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ der algebraischen Größe $\alpha z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$ zusammen mit zwei Bogen von Kegelschnitten gleich wird.*

LÖSUNG

Nach Setzen von

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \alpha z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}+Z$$

wird durch Differenzieren

$$dZ = \frac{dz(ff-\alpha fh+2f(g-\alpha k)zz+g(g-\alpha k)z^4)}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h+kzz}}$$

sein, deren Auflösung in zwei geeignete Teile auf folgende Weise in Angriff genommen werde.

1. Man setze

$$Z = p\int \frac{zzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h+kzz}} + q\int \frac{dz\sqrt{h+kzz}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}$$

und es wird

$$f(f-\alpha h) = qh, \quad 2f(g-\alpha k) = p+qk, \quad g(g-\alpha k) = 0$$

werden, woher man

$$\alpha = \frac{g}{k}, \quad q = \frac{f(fk-gh)}{hk}, \quad p = \frac{-f(fk-gh)}{h}$$

berechnet und deshalb

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$$

$$= C + \frac{gz}{k}\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} - \frac{f}{h}\int dy\sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}} + \frac{fk-gh}{hk}\int dx\sqrt{\frac{h+(fk-gh)xx}{1-gxx}}$$

mit

$$y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} \quad \text{und} \quad x = \frac{z}{\sqrt{f+gzz}}.$$

2. Man setze

$$Z = p\int \frac{zzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h+kzz}} + q\int \frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}$$

und es wird

$$f(f-\alpha h) = 0, \quad 2f(g-\alpha k) = p+qf, \quad g(g-\alpha k) = qg$$

werden, und daher

$$\alpha = \frac{f}{h}, \quad p = \frac{f(gh - fk)}{h} \quad \text{und} \quad q = \frac{gh - fk}{h};$$

daher wird man

$$\int dz \sqrt{\frac{f + gzz}{h + kzz}} = C + \frac{fz}{h}\sqrt{\frac{h + kzz}{f + gzz}} - \frac{f}{h}\int dy \sqrt{\frac{fyy - h}{k - gyy}} + \frac{gh - fk}{gh}\int dx \sqrt{\frac{xx - f}{gh - fk + kxx}}$$

mit

$$y = \sqrt{\frac{h + kzz}{f + gzz}} \quad \text{und} \quad x = \sqrt{f + gzz}$$

haben.

3. Man setze

$$Z = p\int \frac{zzdz}{(f + gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h + kzz}} + q\int dz \sqrt{\frac{h + kzz}{f + gzz}}$$

und es wird

$$f(f - \alpha h) = qfh, \quad 2f(g - \alpha k) = p + q(fk + gh), \quad g(g - \alpha k) = qgk$$

werden, woher sich nichts schließen lässt.

4. Man setze

$$Z = p\int \frac{dz}{(f + gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h + kzz}} + q\int \frac{zzdz}{\sqrt{(f + gzz)(h + kzz)}}$$

und es wird

$$f(f - \alpha h) = p, \quad 2f(g - \alpha k) = qf, \quad g(g - \alpha k) = qg$$

werden, woher sich nichts schließen lässt.

5. Man setze

$$Z = p\int\frac{dz\sqrt{h+kzz}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}} + q\int\frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}$$

und es wird

$$f(f-\alpha h) = ph, \quad 2f(g-\alpha k) = pk + qf, \quad g(g-\alpha k) = qg$$

werden, woher sich nichts ableiten lässt.

6. Man setze

$$Z = p\int\frac{dz\sqrt{h+kzz}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}} + q\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}};$$

es muss

$$f(f-\alpha h) = ph + qfh, \quad 2f(g-\alpha k) = pk + q(fk+gh), \quad g(g-\alpha k) = qgk$$

sein, woher man

$$\alpha = \frac{gh-fk}{hk}, \quad p = \frac{f(fk-gh)}{hk} \quad \text{und} \quad q = \frac{f}{h}$$

ableitet und daher

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$$

$$= C + \frac{gh-fk}{hk}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{fk-gh}{hk}\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}} + \frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$$

mit

$$y = \frac{z}{\sqrt{f+gzz}}.$$

KOROLLAR 1

§91 Daher können alle vier schwierigeren Fälle abgeleitet werden. Denn der erste wird direkt aus Annahme Nummer 6 abgeleitet; denn wegen $fk > gh$ wird aus Fall III

$$\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}} = -\frac{fk}{g\sqrt{gh}}\Pi\frac{gh}{fk}(1-y\sqrt{g})\left[\frac{gh}{fk}\right]$$

mit

$$y = \frac{z}{\sqrt{f+gzz}}$$

sein, dann aber aus Fall II

$$\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} = \frac{h}{\sqrt{fk-gh}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{f}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

und daher

INTEGRATION VON FALL I

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C-\frac{fk-gh}{hk}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}-\frac{f(fk-gh)}{gh\sqrt{gh}}\Pi\frac{gh}{fk}\left(1-\frac{z\sqrt{g}}{\sqrt{f+gzz}}\right)\left[\frac{gh}{fk}\right]$$
$$+\frac{f}{\sqrt{fk-gh}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{f}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

KOROLLAR 2

§92 Hier geht das mittlere Glied durch Überführung der Ellipse in

$$+\frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{f+gzz}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$

über, woher, wenn g negativ genommen wird, für Fall V offenkundig für die Hyperbel wird. Aber für negativ genommenes g wird das letzte Glied aus Fall III

$$\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f-gzz}} = \frac{-(fk+gh)}{gh}\sqrt{\frac{h}{g}}\Pi\frac{gh}{fk+gh}\left(1-z\sqrt{\frac{g}{f}}\right)\left[\frac{gh}{fk+gh}\right]$$

$$= +\frac{h}{\sqrt{fk+gh}}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{f}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$

sein, woher man ableitet:

Integration von Fall V

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h+kzz}} = C-\frac{fk+gh}{hk}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f-gzz}}+\frac{fk+gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{f-gzz}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right]$$
$$+\frac{f}{\sqrt{fk+gh}}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{f}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$

Korollar 3

§93 Nach Annahme Nummer 2 wird Fall IV konstruiert wird, in welchem h negativ genommen wird. Es wird nämlich

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{-h+kzz}}$$
$$= C-\frac{fz}{h}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f+gzz}}+\frac{f}{h}\int dy\sqrt{\frac{h+fyy}{k-gyy}}+\frac{fk+gh}{gh}\int dx\sqrt{\frac{-f+xx}{-fk-gh+kxx}}$$

mit

$$y=\sqrt{\frac{-h+kzz}{f+gzz}} \quad \text{und} \quad x=\sqrt{f+gzz}$$

sein. Nun ist aber

$$\int dy\sqrt{\frac{h+fyy}{k-gyy}} = \frac{-(fk+gh)}{gh}\sqrt{\frac{h}{g}}\Pi\frac{gh}{fk+gh}\left(1-y\sqrt{\frac{g}{k}}\right)\left[\frac{gh}{fk+gh}\right]$$

$$= +\frac{h}{\sqrt{fk+gh}}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{k-gyy}}{\sqrt{k}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$

mit

$$\sqrt{k-gyy} = \frac{\sqrt{fk+gh}}{\sqrt{f+gzz}}$$

und

$$\int dx\sqrt{\frac{-f+xx}{-fk-gh+kxx}} = \frac{gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(x\sqrt{\frac{k}{fk+gh}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right],$$

woher man ableitet

INTEGRATION VON FALL IV

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{-h+kzz}}$$

$$= C - \frac{fz}{h}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f+gzz}} + \frac{f}{\sqrt{fk+gh}}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{fk+gh}}{\sqrt{k(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$
$$+\frac{fk+gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(\frac{\sqrt{k(f+gzz)}}{\sqrt{fk+gh}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right]$$

KOROLLAR 4

§94 Wenn wir hier darüber hinaus g negativ nehmen, geht hervor:

INTEGRATION VON FALL VIII

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}}$$

$$= C - \frac{fz}{h}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f-gzz}} + \frac{f}{\sqrt{fk-gh}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{fk-gh}}{\sqrt{k(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$
$$+\frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{k(f-gzz)}}{\sqrt{fk-gh}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$

und auf diese Weise haben wir alle 12 Fälle vollkommen erledigt.

Zusammenfassung

§95 Wir sehen also ein, dass die zwölf oben aufgezählten Fälle der Formel $\int \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ in drei Klassen aufgeteilt werden, von welchen jede vier Fälle umfasst. Die erste Klasse wird natürlich die Fälle enthalten, deren Integration mit einem einfachen Bogen eines Kegelschnitts durchgeführt wird, die zweite hingegen die, welche darüber hinaus einen algebraischen Teil annehmen, aber die dritte Klasse verlangt außer dem algebraischen Teil zwei Bogen, der eine elliptisch, der andere hyperbolisch. Obwohl wir also in der Aufzählung der Fälle dieser Ordnung noch keine Rechnung getragen haben, scheinen sie nun so darzustellen zu sein.

Klasse		die Integrale werden ausgedrückt mit einem
1.	III, VI	Ellipsenbogen
	II, XII	Hyperbelbogen
2.	XI, IX	algebraischen Teil und Ellipsenbogen
	X, VII	algebraischen Teil und Hypebelbogen
3.	I, IV, V, VIII	algebraischen Teil und zwei Bogen, einer elliptisch, einer hyperbolisch